OLASILIK ÖLÇÜSÜ (Olasılık Aksiyomları)

TANIM: Ω boş olmayan bir küme U da Ω üzerinde tanımlı σ-cebir olsun.

P: U→ [0,1]

A→P(A)

P küme fonksiyonu

i. ∀A∈U için $0 \leq P(A) \leq 1$

ii. P(Ω)=1

iii. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ U'daki *ayrık* olayların bir dizisi olmak üzere

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

özelliklerini sağlıyorsa P küme fonksiyonuna *olasılık ölçüsü* denir. P(A) sayısına ise *A olayının olasılığı* denir.

TANIM: Ω boş olmayan bir küme U da Ω üzerinde σ-cebir ve P, U üzerinde tanımlı bir olasılık ölçüsü ise (Ω,U,P) üçlüsüne bir *olasılık uzayı* denir.

Örnek: Örnek uzay $\Omega=\{a,b,c,d\}$ ve $U=\{A: A \subset \Omega\}$ olsun.

P: U→ [0,1]

$A \to P(A)=\frac{s(A)}{s(\Omega)}$

ile verilen P küme fonksiyonu bir olasılık ölçüsü müdür?

Çözüm:

i. ∀A∈U için P(A)≥0 dır.

ii. $P(\Omega) = \frac{s(\Omega)}{s(\Omega)}=1$

iii. $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\frac{(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)\ nin\ eleman\ sayısı}{s(\Omega)} = \frac{s(A_1) \cup s(A_2) \cup \ldots s(A_n)}{s(\Omega)}$

$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\frac{s(A_1)}{s(\Omega)}+\frac{s(A_2)}{s(\Omega)}+\ldots$

$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots$

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

olduğundan P küme fonksiyonu olasılık ölçüsüdür.

Olasılık ölçüsünün sağladığı bazı özellikler aşağıdaki gibi sıralanabilir:

Teorem: (Ω, U, P) bir olasılık uzayı olmak üzere

i. $A \in U$ için $P(A^c)=1-P(A)$ dır.

İspat: $\Omega = A \cup A^c$ (A ve A^c kümeleri ayrık kümelerdir)

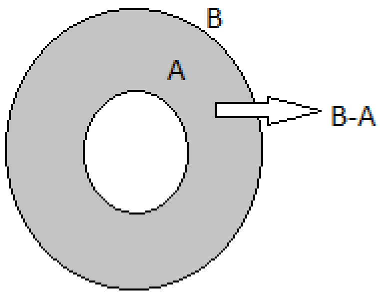
$P(\Omega)=P(A \cup A^c)$

$1=P(A)+P(A^c)$ (3. Aksiyom özelliği kullanılarak yazılır.)

$P(A^c)=1-P(A)$

ii. A ve B olayları için $A \subset B$ ise $P(A) \leq P(B)$ dir.

İspat:



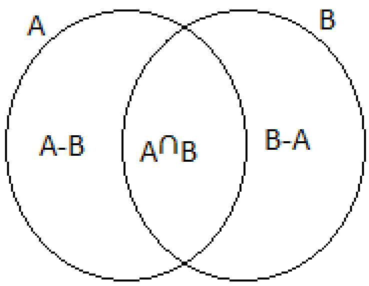
$B=A \cup (B-A)$

$P(B)=P(A \cup (B-A))$

$P(B)=P(A)+P(B-A)$ (3. Aksiyom özelliği kullanılarak yazılır.)

$P(B) \geq P(A)$

iii. A ve B iki olay için



P(A∪B)=P(A)+P(B)−P(A∩B) eşitliği geçerlidir.

İspat:

A∪B=(A−B)∪ (A∩B)∪(B−A)
P(A∪B)=P(A−B)+P(A∩B)+P(B−A) (*)

olur. Burada P(A−B) ve P(B−A) olasılıkları

A=(A−B)∪(A∩B) ⇒ P(A)=P(A−B)+P(A∩B)
P(A−B)=P(A)−P(A∩B)

B=(B−A)∪(A∩B)⇒ P(B)= P(B−A)+P(A∩B)
P(B−A)=P(B)−P(A∩B)

şeklinde bulunur. Bu olasılıklar (*) eşitliğinde yerine yazılırsa

P(A∪B)=P(A−B)+P(A∩B)+P(B−A)
P(A∪B)=P(A)−P(A∩B)+P(A∩B)+P(B)− P(A∩B)
P(A∪B)= P(A)+P(B)− P(A∩B)

elde edilir.

Örnek: (Ω, U, P) bir olasılık uzayı olsun. A,B∈U olmak üzere

P(A)=0,4 P(B)=0,7 P(B\A)=P(A^c ∩ B)=0,3 ise

- **a)** P(A^c)=?
- **b)** P(A∩B)=?
- **c)** P(A∪B)=?
- **d)** P(A∪ B^c)=?
- **e)** P(A^c ∩ B^c)=?
- **f)** P(A^c ∪ B^c)=?

HATIRLATMA

P(B^c)=1−P(B)
P(A^c)=1−P(A)
A^c ∪ B^c=(A ∩ B)^c
A^c ∩ B^c=(A ∪ B)^c
P(A^c ∩ B^c)=P((A ∪ B)^c)=1−P(A∪B)
P(A^c ∪ B^c)=(P((A ∩ B)^c)=1−P(A ∩ B)

Çözüm:

- **a)** P(A^c)=1−P(A)=1−0,4=0,6
- **b)** P(B−A)=P(B)−P(A∩B) ise P(A∩B)=0,7−0,3=0,4
- **c)** P(A∪B)=P(A)+P(B)−P(A∩B)=0,4+0,7−0,4=0,7
- **d)** P(A∪ B^c)=P(A)+P(B^c)−P(A∩ B^c)
  P(A−B)=P(A)−P(A∩B)=0,4−0,4=0
  P(A∪ B^c)=P(A)+P(B^c)−P(A∩ B^c)=0,4+0,3−0=0,7
- **e)** P($A^c \cap B^c$)=P($(A \cup B)^c$)=1−P(A∪B)
  =1−0,7=0,3
- **f)** P($A^c \cup B^c$)=P($(A \cap B)^c$)=1−P(A ∩ B)
  =1−0,4=0,6

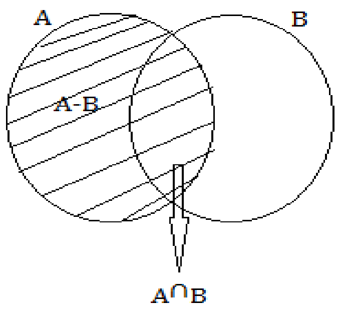
Örnek: (Ω, U, P) bir olasılık uzayı olsun. A ve B , Ω örnek uzayında iki olay olsun.

P($\bar{A}$ ∩B)=$\frac{1}{10}$ P(A∩ $\bar{B}$)=$\frac{4}{10}$ P($\overline{A \cap B}$)= $\frac{6}{10}$

- **a)** P(A)=?
- **b)** P(B)=?
- **c)** P(A∪B)=?
- **d)** P($\bar{A}$ ∪B)=?

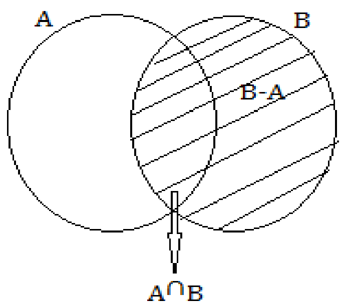
Çözüm:

a)



A=(A−B)∪ (A∩B)
P(A)=P(A−B)+P(A∩B)
P(A)=P(A∩ $\bar{B}$)+P(A∩B)
P(A)=$\frac{4}{10}+\frac{4}{10}=\frac{8}{10}$
P($\overline{A \cap B}$)=1−P(A∩B)
$\frac{6}{10}$= 1−P(A∩B)
P(A∩B)= $\frac{4}{10}$

b)



B=($\bar{A}$ ∩B)∪ (A∩B)
P(B)=P($\bar{A}$ ∩B)+P(A∩B)
=$\frac{1}{10}+\frac{4}{10}=\frac{5}{10}$

c) P(A∪B)=P(A)+P(B)−P(A∩B)

$=\frac{8}{10}+\frac{5}{10}-\frac{4}{10}=\frac{9}{10}$

d) P($\bar{A}$ ∪B)=P($\bar{A}$)+P(B)– P($\bar{A}$ ∩B)

$=\frac{2}{10}+\frac{5}{10}-\frac{1}{10}=\frac{6}{10}$

Örnek: A, B ve C Ω örnek uzayında üç olay olsun.

Ω={$w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$}

P(w_i)={0.15, 0, 0.30, 0.25, 0.10, 0.20}

U=σ(Ω)

P: U→ [0,1]

$$A \rightarrow P(A)=\begin{cases} 0 & , \quad A=\emptyset \\ A'daki\ elemanlara\ karşılık\ gelen\ olasılıkların\ toplamı & , \quad A \neq \emptyset \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

P(Ω)=0.15+0+0.30+0.35+0.10+0.20=1 ve

A={w_1, w_3, w_5} , B={w_2, w_3} ve C={w_1, w_2, w_5} olayları tanımlandığına göre

a) P(A)=?

b) P(B)=?

c) P(C)=?

d) P(A∩B)=?

e) P(B∩C)=?

f) P($\bar{A}$)=?

g) P($\bar{A} \cap \bar{B}$)=?

h) P($\bar{A}$ ∪B)=?

i) P($\bar{A} \cup \bar{B}$)=?

Çözüm:

a) A={w_1, w_3, w_5} →P(A)=P(w_1)+P(w_3)+P(w_5)=0.15+0.30+0.10=0.55

b) B={w_2, w_3} →P(B)=P(w_2)+P(w_3)=0+0.30=0.30

c) C={w_1, w_2, w_5} →P(C)=P(w_1)+P(w_2)+P(w_5)=0.15+0+0.10=0.25

d) A∩B={w_3} →P(A∩B)=P(w_3)=0.30

e) B∩C={w_2} →P(B∩C)=P(w_2)=0

f) P($\bar{A}$)=1−P(A)=1−0.55=0.45

g) A∪B={w_1, w_2, w_3, w_5}

P(A∪B)=P(w_1)+P(w_2)+P(w_3)+P(w_5)=0.15+0.30+0.10=0.55 ise

P($\bar{A} \cap \bar{B}$)=P($\overline{A \cup B}$)=1−P(A∪B)=1−0.55=0.45 bulunur.

h) P($\bar{A}$ ∪B)=P($\bar{A}$)+P(B)−P($\bar{A} \cap B$)=0.75

II.yol: $\bar{A}$ ∪B={w_2, w_4, w_6} ∪ {w_2, w_3}={w_2, w_3, w_4, w_6} ise

P($\bar{A}$ ∪B)=0+0.30+0.25+0.20=0.75

i) A∩B={w_3} →P(A∩B)=0.30 ise

P($\bar{A} \cup \bar{B}$)=P($\overline{A \cap B}$)=1−P(A∩B)=1−0.30=0.70

olarak bulunur.

Kaynaklar

1. Akdi, Y. (2010). Matematiksel İstatistiğe Giriş, Gazi Kitabevi, Ankara.
2. Sağlam, V., Sağır, M. ve Yücesoy, E. (2018). Olasılığa Giriş, Güncellenmiş 3. Baskı, Seçkin Yayınevi.
3. Akdeniz, F. (2007). Olasılık ve İstatistik, Nobel Kitabevi.
4. Hogg, R. V. and Craing, A. T. (1989). Introduction to Mathematical Statistics. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.
5. Larson, H. J. (1982). Introduction to Probability Theory and Statistical Inference. 3rd Ed., New York: John Wiley ve Sons.
6. Ross, M,R. (2012) Olasılık ve İstatistiğe Giriş-Mühendisler ve Fenciler için, 4. Basımdan Çeviri, Nobel Kitabevi.
7. Mendenhall, W., Wackerly, D. D. and Scheaffer, R. (1990). Mathematical Statistics with Applications. 4th Ed., Boston: PWS-Kent Publishing Company.
8. Erbaş, S.O. (2007). Olasılık ve İstatistik, İkinci Baskı, Gazi Kitabevi.